

A KÁRPÁT-MEDENCE HAGYOMÁNYOS HÚSVÉTI TOJÁSMINTÁI ÉS A GÖMBI GEOMETRIA SZIMMETRIACSOPORTJAI

Stettner Eleonóra, Nienhaus Rózsa

Abstract: Ebben a cikkben azt elemezzük, hogy a gömbi szimmetriacsoporthoz melyek találhatók meg és melyek nem a Kárpát-medencében legelterjedtebb viaszlevonatos tojásminták között. Megkísérelünk arra is választ adni, hogy ezekben miért pont az adott szimmetriájú díszítések jelennek meg. Előtte áttekintést adunk a tojásdíszítés történetéről, a fent említett díszítési technikáról. A cikk megjelentetésével nem titkolt célunk az is, hogy ezt a hagyományt a hozzá kapcsolódó mintakinccsel minél szélesebb körben ismertté tegyük. A cikk második fejezetének szerzője Nienhaus Rózsa, a Míves Tojás múzeum alapítója.

Key words: gömbi geometria, szimmetriacsoporthoz, tojásminták

1. Bevezetés

A matematika és művészet kapcsolatában megkerülhetetlen a szimmetria fogalma. A Kaposvári Egyetemen tartott Matematika és művészet óráimra, az ÉlményMűhely foglalkozásaira készülve a régi több száz, néha több ezer éves népművészeti alkotásokban meglepett az alkalmazott szimmetriák gazdagsága. M. C. Escher holland festőművész munkáinak, életének tanulmányozása óhatatlanul elvezet az Alhambra csempéinek mintáihoz. Meglepő, hogy itt mind a 17 síklefedő szimmetriacsoporthoz megtalálható [15]. Az Alhambra mintáit kr. u. 13-15. században készítették. A matematikusok a síkbeli kristálycsoporthoz teljes osztályozását a 19. és 20. század fordulóján adták meg. Ekkor bizonyították be azt, hogy pontosan 17 ilyen csoport van. Gyakran fordul elő a matematikában, hogy egy tételt több matematikus egymástól függetlenül, szinte egyidőben bizonyít be. Itt is ez történt. „Az E^2 euklideszi síkban 17 kristálycsoporthoz van. Ezek első teljes felsorolását Fjodorov közölte (1890) a $219+11$ térbeli kristálycsoporthoz együtt, amit vele egyidőben Schoenflies (1891) is felfedezett. Fricke és Klein is foglalkozott a síkbeli kristálycsoporthoz 1897-ben, majd Pólya György 1924-ben. Nowacki absztrakt módon írta le a kristálycsoporthoz.” [14]

Mind a 17 csoport megtalálható ez eredeti magyar népi hímzéseken is, ezek sem az elmúlt 200 évben készültek [9]. Sőt Bérczi Szaniszló felhívja a figyelmet arra, hogy a 7 fríz szimmetria megtalálható a magyar honfoglaláskori díszítőművészetben is [11]. Ezek, a fríz szimmetriák, hiánytalanul megtalálhatók a magyar népi hímzéseken [10], sőt akkor is az összes előbukkan, ha csak a speciális technikájú keresztzetes hímzéseken vizsgáljuk.

A gömbi szimmetriákra az ezer éves japán temari technika mutat példát. Eredetileg egyszerű, gyermekek számára készült játékgolyó volt, de a lenyűgöző minták elkészítésének módját ma már számtalan Youtube videó alapján bárki megtanulhatja [12]. A temari golyókban rejlő matematikai tartalom és a művészet kapcsolatára a legnagyobb matematikai művészeti világkonferencia Carolyn Yackel által jegyzett cikke is felhívja a figyelmet. [13]

A tojásmintákkal Györgyi Erzsébet [2] cikkében találkoztam először rendszerezett formában. A Míves Tojás Múzeum (Zengővárkony) alapítójával létrejött kapcsolatomból révén nyílt lehetőségem a több ezer tojás között változatos díszítő technikákkal megismerkedni, s azokat témánkhoz kapcsolódóan részletesen vizsgálni és elemezni. Azt vettem észre, hogy a viaszlevonatos technikával készült tojások rendelkeznek a leggazdagabb szimmetriával. Ezért jelen cikk ezekkel foglalkozik, és a Múzeum fotó anyagából válogatva ezekkel illusztrálja az előforduló gömbi szimmetriákat. „Ezzel az eljárással készült a jellegénél fogva archaikusnak ítélt tojásdíszítmények túlnyomó része, és okunk van feltételezni, hogy az általunk vizsgálható száz évet megelőző évszázadokban paraszti kézen ez a technika lehetett általános.” [2].

A tojás topológiai homeomorf a gömbbel, ez lehetőséget ad a tojásminták és a gömbi szimmetriák összehasonlítására. A minták csoportosítása a gömbi szimmetria csoportok rendszere szerint történik.

Végezetül, mint minden emberkéz által készített műalkotásnál meg kell említenünk a disszimmetria¹ fogalmát. A minta nem lehet teljesen, tökéletesen szimmetrikus, ez egyrészt köszönhető a minta hordozójának, a tojásnak, másrészt az emberi alkotás természetének.

2. A póre tojástól a hímes tojásig

A tojás, mint az élet hordozója, adott esetben forrása, kitüntetett kultúrtörténeti jelentőséggel bír. A különböző teremtés-mítoszok központi eleme a tojás (őstojás), melynek felosztásából eredeztethetők a világmindenség elemei. Európai vonatkozásban, mint teremtés-mítosz a Kalevala említendő [4], [5].

A tojásdíszítés ősi eredetű tevékenység. A tojásnak különböző népcsoportok varázserőt tulajdonítottak. Díszítése vélhetően e varázserő fokozását szolgálta. Kultikus tárgyként sírokba is helyezték. Az általunk ismert irodalmi hivatkozás szerint 60.000 éves egy Dél-Afrikai strucc-tojás lelet [6]. Magyar vonatkozásban avar kori tojástöredék került elő karcolt vonalakkal Móra Ferenc ásatása során [7]. További előfordulásokról tesz említést többek közt Tészabó Júlia: áttört kőtojás Egyiptomból i.e. 500 körül [5], Beluleszkó Sándor: "Az a szokás, hogy húsvétkor hímes tojással ajándékozzák meg egymást a jó barátok, ismerősök, ösrégi, s rendkívül elterjedt. A pogány kor tavaszi ünnepéyeiben gyökeredzik, meg volt az ókori népek legtöbbszörénél, Kínában pl. már több, mint 2000 éve ismeretes. Jelképes kifejezője volt annak az öröme, amelyet az ember tavasz kezdetén a természet feltámadásán, újjászületésén érzett. Átvette a kereszténység is, mint a legtöbb olyan szokást, amely a tanait elfogadott népek hagyományain alapult. Szimbolikus jelentése ekkor annyiban változott, hogy ezentúl Krisztus feltámadásának jelképezője." [8].

Ezek a források mutatják a tojásdíszítés ősi eredetét, a világban való elterjedtségét. Az utolsó idézet pedig elvezet a jelen húsvétjához. Az ünnephez kötődő, tojással, tojásdíszítéssel kapcsolatos hagyományok, szimbolika tárgyalása terjedelmi okból jelen cikknek nem témája. A gömbi szimmetriáknak a díszített tojások mintázatával való összevetését a Kárpát medence erdélyi tájegységeiről származó mintákkal díszített tojások bemutatásával végezzük.

Zengővárkony Pécs megyeszékhelytől 17 km-re, a Keleti Mecsek lábánál, festői környezetben fekvő kisközség, gazdag népművészeti hagyományokkal. 2000. Április 16. óta itt működik a csak díszített tojásokat bemutató állandó kiállítás, a Míves Tojás Múzeum in Figure 1. Közel 5000 darabot számláló, 21 ország 55 tájegységéből származó gyűjteményéből a vitrinekben mintegy 2000 műtárgy, többségükben írott, festett, karcolt tojás látható. Érdekesek a rátétes tojások, ahol a mintázatot különféle anyagoknak a tojás felületére rögzítve alakítják ki. A Múzeum célja a tojásdíszítő népművészet hagyományainak megismertetése, tárgyi emlékeinek gyűjtése és bemutatása. A cikkben bemutatott tojás- illusztrációk viaszlevonatos technikával készültek.

Az egyik leggyakrabban alkalmazott díszítő módszer a viasszal való tojásírás in Figure 2. Alkalmas eszköz (íróka) segítségével a folyékony viasszal mintákat rajzolunk a tojás felületére. A szabadon maradt részeket festőlebe merítve színezhajjuk. Ha száradás után a viasz a felületen marad, viaszrátétes, ha letöröljük, viaszlevonatos tojást kapunk. Ezen egyszerű munkaelemeket "művészi szakszerűséggel" ismételve sokszínű kompozíciót érhetünk el.

A húsvéti tojásírást vidékenként változóan Nagycsütörtökön vagy Nagypénteken végezték. A folyamat, mint minden anyagot alakító alkotásnál, itt is az anyaggal, azaz a póre tojással való ismerkedéssel kezdődik. Kézbe véve, simogatva dől el, hogy milyen minta kerül rá, amely legtöbbször "menet közben" alakul. Ez alól kivétel az Erdélyben elterjedt veszett utas, vagy vétett utas minta, melyet a legnehezebbnek tartottak és legelőször írtak meg a tojásíró asszonyok csendben és teljes figyelem összpontosítással. A minta kiterített rajza egy labirintus. Tojásra írása technikailag sem könnyű feladat, biztos kéz és jó arányérzék szükséges hozzá.

¹ Disszimmetria a szimmetriának egy kis sérülése. A jelenség, törvény, minta fő vonalaiban őrzi a szimmetriát, de részleteiben a szimmetria nem feltétlenül érvényesül.



Figure 1. Míves Tojás Múzeum, Zengővárkony



Figure 2. Tojásírás viasszal, írókával

3. Geometrikus felületosztó hálózat a tojás felületén

A tojáshímzés díszítéskincsének rendszerezése több szempontból megtörtént, egyik nagyon alapos munka Györgyi Erzsébet tanulmánya [2]. Jelen cikk a rendszerezést a matematika oldaláról, a gömbi szimmetriacsoportok szerint közelíti meg. Úgy tudjuk, hogy a viaszlevonatos tojásminták ilyen szempont szerinti osztályozása még nem történt meg.

„A hímes tojás díszítését a következő tényezők alakítják ki együttesen: a díszítőtechnika, a tojás felületének felosztása, az alkalmazott díszítmények, az esetleges feliratok, utóbbi kettőnek a tojás osztott vagy osztatlan felületén való elhelyezése és a színezés.” [2]. Szimmetriák szempontjából bennünket a felületosztás érdekel, ez befolyásolhatja az előforduló szimmetriacsoportot.

A felületosztó vonalak hosszanti felezők, keresztfelezők, vagy ferde felezőpárok lehetnek in Figure 3 and in Figure 4. A harmadik ábra bal oldali képén oldalnézetből, a negyedik ábrán felülnézetből láthatók a hosszanti felezők. Az „a”-val jelült vonalak az úgynevezett elsőrendű, a „b”-vel jelöltek a másodrendű felezők. A harmadik ábra középső képe a keresztfelezőket szemlélteti, „b”-vel jelöltük a csak egyszerűen keresztfelezőnek nevezett vonalat, „a” a felső felezőt, „c” az alsó felezőt mutatja. A harmadik ábra jobb oldali képén pedig a ferde felezőpárok láthatók.

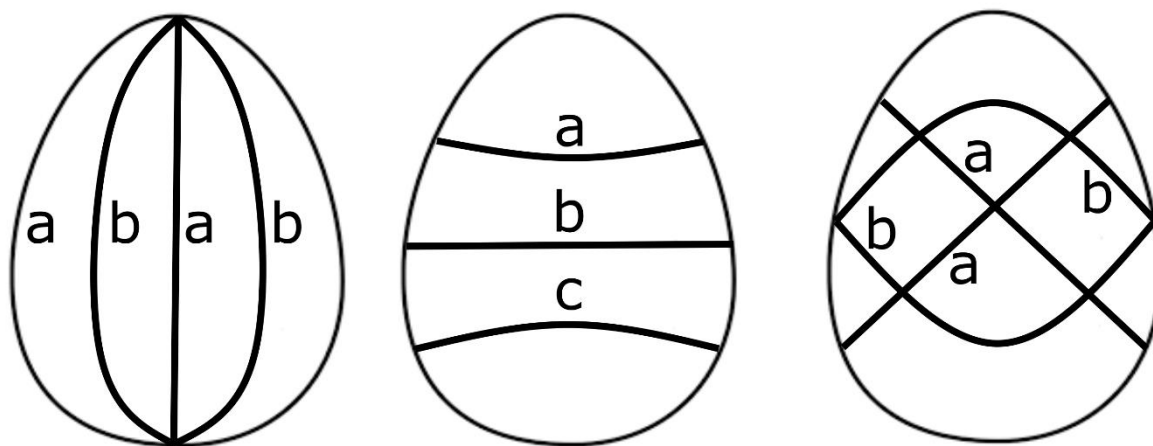


Figure 3. Felületosztó vonalak, oldalnézet

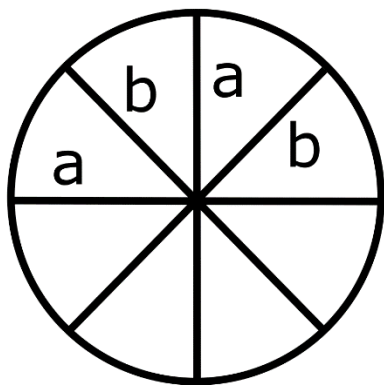


Figure 4. Felületosztó vonalak, felülnézet

Sokáig fejtörést okozott számomra az, hogy harmadrendű szimmetriák (akár tükrözések, akár elforgatások) megjelennek a tojásokon, de ötödrendűek nem. Ha egy tojás felületén csak azonos típusú (hosszanti felezők, vagy keresztfelezők, vagy ferde felezőpárok) felületosztó vonalakat húzunk meg, harmadrendű szimmetriák sem jelenhetnek meg, mivel a vonalak mindig 2 hatvány részre osztják a tojás felületét. Ehhez fontos azt is megjegyeznünk, hogy a tojásírók szimmetriára való törekvését jelzi az, hogyha a tojás alsó felében meghúznak egy keresztfelezőt, vagy ferde felezőt, akkor az a tojás alsó felében is megjelenik. De, ha különböző típusú felületosztó vonalak együttesen is megjelenhetnek a tojás felületén, akkor már létrejöhetnek harmadrendű szimmetriák, de ötödrendűek nem. Különböző típusú osztóvonalak két szokásos együttes megjelenését mutatja a tojás felületén az 5. ábra. A bal oldali rajzon jól látható, hogy a pirossal jelölt pontokban három felületosztó vonal találkozik. Tehát ezekben a pontokban létrejöhetnek harmadrendű forgás vagy tükrözés szimmetriák. Ez a felületosztás 48 háromszöget hozott létre, így, ha egy minta az 5. ábra rendszerét követi lehet 48-ad rendű szimmetriacsoport. Ha két, vagy négy egymás melletti háromszöget egyesít a minta a csoport rendje 24 és 12 is lehet. Másik felosztás is vezethet harmadrendű szimmetriához. A középső rajzon a hosszanti és keresztfelezőket húztuk meg. Így a tojás felületén 16 háromszög és 16 négyszög keletkezett. A tojás két végén elkeskenyedő formájából következően akkor kapunk viszonylag egyenletes felosztást, ha a tizenhat négyszög mindegyikét háromszögekre bontjuk. Így $16 + 2 \cdot 16 = 48$ háromszög keletkezik és itt is lesznek olyan pontok, ahol 6 háromszög találkozik. Ezeket váltakozó színekkel vagy mintákkal kitöltve itt is létrejöhet harmadrendű szimmetria. Az 5. ábra jobb oldali képén egy ilyen módon megfestett tojást láthatunk. Természetesen a harmadrendű szimmetriát tartalmazó minták nem csak háromszögekből állhatnak, hanem tetszőleges minta lehet ilyen, ami a bemutatott rendszereket követi.

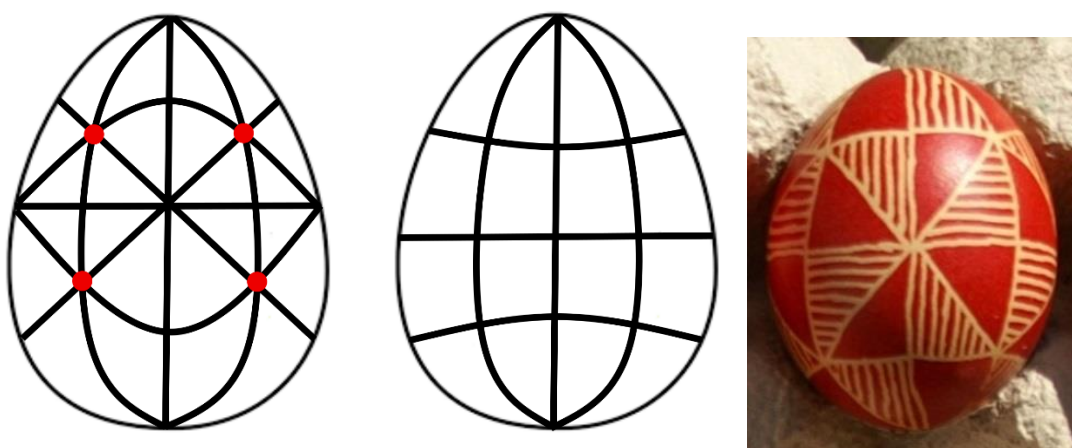


Figure 5.

4. Tojásminták és gömbi szimmetriacsoportok

Végtelen sok gömbi szimmetriacsoport létezik, ezek 14 családba sorolhatók, ahogy az 1. táblázatban látható. Vannak olyan szimmetriacsoportok, amelyekhez nagyon sok tojásmintát lehet találni, ezek különösen kedveltek voltak a tojásírók körében, ilyenek például a 22N, *NN, *22N csoportok, ahol $N = 2$ és $N = 4$ esetet is sok különböző minta jeleníti meg. Legnehezebben az utolsó vegyes csoporthoz, - amely forgatást és eltolástükrözést tartalmaz - találtam mintát, egyetlen egyet a [2] irodalomban. Ez a minta természetesen csak akkor felel meg a megadott csoport szimmetriáinak, ha az esetlegesen elhelyezett pöttyöktől eltekintünk (in Figure 15.).

A mintákat elemezhetjük úgy is, hogy csak a rajz vonalait, a formákat vesszük figyelembe, a tartományok különböző kitöltését (más színű tartományok, pöttyözött, vonalkázott tartományok) nem. Erre a 13. ábrán látható *332 csoport szimmetriáját követő minta a példa. A bal oldali tojás mintája teljesen – a kitöltéseket is figyelembe véve - megfelel a csoportnak, a középső és jobb oldali csak akkor, ha a színezésektől eltekintünk. Ki szeretném még emelni érdekességként a 332 csoporthoz tartozó 8. ábrán látható tojásmintát, ami az Escher féle sík-, vagy gömblefedő mintákra emlékeztet. Itt a tojásfestő egybevágó formákat rajzolt a tojásra, a minta 4 pöttyös és 4 sima harmadrendű forgásszimmetrikus tartományból áll. A fundamentális tartomány (fundamental domain) $1/3$ -ad pöttyös és $1/3$ -ad sima tartomány egyesítése, így kijön a 12-ed rendű csoport ($3 \cdot 8 = 24$, $24/2 = 12$). Ha nem különböztetnénk meg a sima és a pöttyös tartományokat, akkor 432 csoport lenne, amelynek fundamentális tartománya a „szép három karú alakzat” $1/3$ része és az így kapott csoport rendje 24 lenne.

Észrevehetjük, hogy a tisztán elforgatásokat, vagy tengelyes tükrözéseket tartalmazó csoportból csak azok hiányoznak, amelyek ötödrendű szimmetriát tartalmaznak. A vegyes csoportokból kettőhöz nincs tojás minta, de már említettem, hogy az utolsóhoz is csak nehezen találtam egy nem teljesen megfelelő példát.

A gömbi csoport jele	A gömbi csoport rendje	A tojás szimmetria csoportjának jele	A tojás szimmetria csoportjának rendje	A tojás képe
Csak forgásszimmetriát tartalmazó csoportok				
NN	N	44	4	Figure 6.
22N	2N	226	12	Figure 7.
332	12	332	12	Figure 8.
432	24	432	24	Figure 9.
532	60	—	—	—
Csak tengelyes tükrözést tartalmazó szimmetriacsoportok				
*NN	2N	*22	4N	Figure 10.
*22N	4N	*224	16	Figure 11.
*432	48	*432	48	Figure 12.
*532	120	—	—	—
*332	24	*332	24	Figure 13.
Vegyes, tengelyes tükrözést, forgatást, esetleg eltolás tükrözést egyaránt tartalmazó szimmetriacsoportok				
3*2	24	—	—	—
N*	2N	—	—	—
2*N	4N	2*3	12	Figure 14.
Nx	2N	4x	8	Figure 15.

Table 1. A gömbi szimmetriacsoportok áttekintése



Figure 6.



Figure 7.



Figure 8.



Figure 9.



Figure 10.



Figure 11.



Figure 12.



Figure 13.



Figure 14.

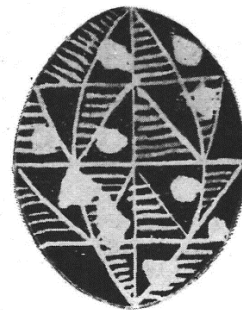


Figure 15.

Következtetések

A matematika és művészet kapcsolatára, pontosabban a matematika és a népművészet kapcsolatára a tojásmintákban rejlő szimmetria is rávilágít. Több különböző mintagyűjteményt áttekintve, tojásírókkal konzultálva a legtöbb szimmetriacsoporthoz sikerült mintákat találni. (Ha az olvasók közül valakinek tudomása van valamely hiányzó mintáról és elküldi, köszönettel vesszük.) A szerzők egyike az ÉlményMűhely alapító tagja és kutatási koordinátora, így fontosnak tartjuk az ÉlményMűhely egyik fő törekvését a STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics) oktatás támogatását. Terveink között szerepel, hogy a húsvéti ünnepek előtti héten a Zengővárkonyi Míves Tojás Múzeumban ÉlményMűhely foglalkozást tartunk gyerekeknek, ahol nemcsak a tojásdíszítés

technikájával, hanem a minták szimmetriájával is megismerkedhetnek, és így, játékos alkotás közben észrevétlenül elsajátíthatnak matematikai tartalmakat is.

Irodalom

- [1] John Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss (2008), *They Symmetries of Things*. Taylor & Francis
- [2] Györgyi Erzsébet (1974), A tojáshímzés díszítménykincse, *Néprajzi értesítő*, 56, 5-86. p.
- [3] Branko Grünbaum (2006), What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra? *Notices of the AMS*, 53, 6, 670-673.p.
- [4] Makoldiné Papp Gizella (1994), *Hímestojások Gömörben*, Debrecen, 3-7. p
- [5] Tészabó Júlia (1990), *Nagy húsvéti képeskönyv*, Budapest, 31. p.
- [6] Egg Cetera #6: Hunting for the world's oldest decorated eggs
<https://www.cam.ac.uk/research/news/egg-cetera-6-hunting-for-the-worlds-oldest-decorated-eggs>
[2018. 09.28.]
- [7] Móra Ferenc (1932), Néprajzi vonatkozások szegedvidéki népvándorláskori és korai magyar leletekben. *Ethn.*, XLIII, 54—68. p.
- [8] Beluleszko Sándor (1905), Magyar hímes tojások, *Néprajzi Értesítő* 6, 112-120. p.
- [9] István Hargittai, Gyöngyi Lengyel (1985), The seventeen two-dimensional space-group symmetries in Hungarian needlework, *Journal of Chemical Education* 62, 1, 35–36. p.
- [10] István Hargittai, Gyöngyi Lengyel, (1984), The 7 one-dimensional space-group symmetries illustrated by Hungarian folk needlework, *Journal of Chemical Education*, 61, 12, 1033-1034. p.
- [11] Bérczi Szaniszló (2010), A honfoglalás kori magyar díszítőművészet gyökereinek nyomozása az eurázsiai ősi intuitív- és etnomatematikai alkotások körében, az avar, a hun és a szkíta régészeti leleteken ((Investigation of the Roots of the Ornamental Art of Árpád's Hungarian People in the Light of the Ancient Eurasian Intuitive- and Ethnomathematics, on the Avar, Hun (Xiongnu) and Scythian Archaeological Finds.)
https://www.researchgate.net/publication/305650214_A_honfoglalas_kori_magyar_diszitomuveszet_gyokereinek_nyomozasa_az_eurazsiai_osi_intuitiv-es_etnomatematikai_alkotasok_koreben_az_avar_a_hun_es_a_szkita_regeszeti_leleteken_Investigation_of_the_Roots [2018.09.25.]
- [12] <http://temari.com/> [2018.09.25.]
- [13] Carolyn Yackel (2011), Teaching Temari: Geometrically Embroidered Spheres in the Classroom, *Proceedings of the Bridges 2011 conference: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 563-566. p.
- [14] Stettner Eleonóra (2004), Felületek számítógépes előállítás és a 3⁻ felület szimmetriacsoportjai. *PhD értekezés. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola, Budapest*, 1-81. p.
http://doktori.math.bme.hu/Ertekezesek/Stettner_disszertacio.pdf [2018.09.25.]

[15] R. Pérez-Gómez (1987) The four Regular Mosaics Missing in the Alhambra, *Comput. Math. Applic.* 14, 2, 133-137. p.

Authors

Eleonóra Stettner, Kaposvári Egyetem, Kaposvár, Magyarország,

email: stettner.eleonora@gmail.com

Rózsa Nienhaus, Míves Tojás Múzeum, Zengővárkony, Magyarország,

email: nienhau@uni-muenster.de, tojas@museum.hu